Tanım: $x^Ty=0$ ise $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$'deki x ve y vektörlerine diktir denir.

Örk: 1) $\mathbb{R}^2$'de $x=0$ vektörü her vektöre diktir.

2) $\mathbb{R}^2$'de $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ vektörleri diktir.

$$e_1^T\cdot e_2=[1\ 0]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=1.0+0.1=0$$

3) $\mathbb{R}^2$'de $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}$ vektörleri diktir.

$$[1\ 3]\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}=6-6=0$$



4) $\mathbb{R}^3$'de $e_1$ ve $e_2$ veya $e_1$ ve $e_3$ veya $e_2$ ve $e_3$ vektörleri diktir.

5) $\mathbb{R}^3$'de $\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix}$ vektörleri

$$[4\ -1\ 2]\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix}=4.1+(-1)(-2)+2.(-3)=0$$

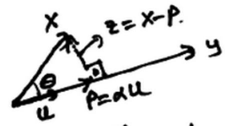
olduğundan diktir.





Skalar ve vektör izdüşümleri (projeksiyon)

Skaler çarpım bir vektörün diğer vektör doğrultusundaki bileşenini bulmada da kullanılabilir. x ve y, $\mathbb{R}^2$'de veya $\mathbb{R}^3$'de sıfırdan farklı vektörler olsun.




x vektörünü, p, y doğrultusunda, z'de p'ye dik olmak üzere, p+z formunda yazmak istiyoruz.



y doğrultusundaki birim vektör $u=\frac{y}{\|y\|}$ olsun.

Amacımız $p=\alpha u$ ve p, $z=x-\alpha u$'ya dik olmak koşuluyla $\alpha$'yı bulmak. p ve z'nin dik olması için $\alpha$ skaleri

$$\alpha=\|x\|\cos\theta \Rightarrow \alpha=\frac{\|x\|\,\|y\|}{\|y\|}\cos\theta=\frac{x^Ty}{\|y\|}$$

denklemini sağlamalıdır. $\alpha$ skalerine x'in y üzerinde skaler izdüşümü ve p vektörüne de x'in y üzerinde vektör izdüşümü denir. (Yani x'in y üzerinde skaler izdüşümü

$$\alpha=\frac{x^Ty}{\|y\|}$$

vektör izdüşümü de

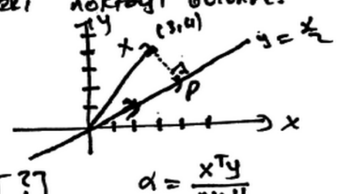
$$p=\alpha u=\alpha\frac{y}{\|y\|}=\frac{x^Ty}{y^Ty}y \qquad (\|y\|^2=y^Ty)$$

dir.





Örk: (3,4) noktasının, $y=\frac{x}{2}$ doğrusundaki olan en kısa uzaklığını veren, $y=\frac{x}{2}$ doğrusu üzerindeki noktayı bulunuz.




$y=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $\qquad \alpha=\frac{x^Ty}{\|y\|}$

$x^Ty=[3\ 4]\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=10$ $\qquad \alpha=\frac{x^Ty}{\|y\|}=\frac{10}{\sqrt5}$

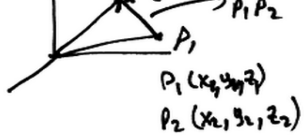
$\|y\|=\sqrt{y^Ty}=\sqrt{4+1}=\sqrt5$



$$u=\frac{y}{\|y\|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/\sqrt5\\1/\sqrt5\end{bmatrix}$$

$$p=\alpha.u=\frac{10}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2/\sqrt5\\1/\sqrt5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$'de $P_1$ noktasından $P_2$ noktasına giden vektörü $\overline{P_1P_2}$ ile göstereceğiz.




$P_1(x_1,y_1,z_1)$

$P_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\overline{P_1P_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)^T=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{bmatrix}$$





Eğer N, $\mathbb{R}^3$'de sıfırdan farklı bir vektör ve $P_0$ sabit bir nokta ise $\overline{P_0P}$'nin N'ye dik olacak şekildeki bütün P noktalarının kümesi, $\mathbb{R}^3$'de $P_0$'dan geçen bir $\pi$ düzlemi oluşturur. N vektörü ve $\pi$ düzlemine birbirine normaldir denir. $P=(x,y,z)$ noktasının $\pi$ düzleminde olması için gerek ve yeter şart

$$(\overline{P_0P})^T N=0$$

olmasıdır. Eğer $N=(a,b,c)$



$P_0=(x_0,y_0,z_0)$ ise bu düzlem denklemi

$$\overline{P_0P}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)^T=\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{bmatrix}$$

$$(\overline{P_0P})^T N=0 \Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

dır.

Örk: $(1,2,-1)$ noktasından geçen ve $N=(2,4,3)^T$ vektörüne normal olan düzlemin denklemini bul.

$P_0=(1,2,-1)$ $\qquad \overline{P_0P}=(x-1,\ y-2,\ z+1)^T$

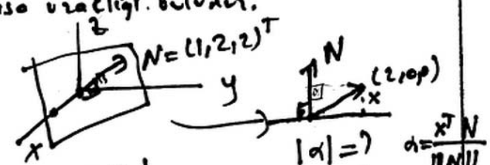
$$2(x-1)+4(y-2)+(3)(z+1)=0$$

$$2x+4y+3z=7$$

$$2x+4y+3z=7$$

275

2) $(2,0,0)$ noktasından $x+2y+2z=0$ düzlemine olan en kısa uzaklığı bulunuz.




$|\alpha| = ?$ $\quad \alpha = \frac{x^T N}{\|N\|}$

$$|\alpha| = \left| \frac{[2\ 0\ 0]\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}}{\|N\|} \right| = \frac{2}{3}$$

276

## $\mathbb{R}^n$'de diklik

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$'de verilen bütün tanımlar $\mathbb{R}^n$'ye genellenebilir. Eğer $x\in\mathbb{R}^n$ ise $x$'in öklid uzunluğu

$$\|x\| = \sqrt{x^Tx} = (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Eğer x ve y, $\mathbb{R}^n$'de iki vektör ise bu iki vektörün arasındaki uzaklık $\|y-x\|$ dir. $\mathbb{R}^n$'de de Cauchy-Schwarz eşitsizliği doğrudur. Bundan dolayı $\mathbb{R}^n$'deki herhangi x ve y vektörleri için $-1 \le \frac{x^Ty}{\|x\|\|y\|} \le 1$ dir.

$$|x^Ty| \le \|x\|\|y\|$$

277

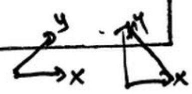
$\mathbb{R}^n$'deki iki vektör x ve y arasındaki açı

$$\cos\theta = \frac{x^Ty}{\|x\|\|y\|} \qquad 0\le\theta\le\pi$$

olarak verilir. Eğer $u=\frac{x}{\|x\|}$ ve $v=\frac{y}{\|y\|}$ ise $\cos\theta = u^Tv$ dir. $x^Ty=0$ ise x ve y vektörlerine diktir denir. ve $\perp$ sembolü diklik için kullanılır. Yani x ve y dik ise $x\perp y$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$'deki x ve y vektörleri için

$$\|x+y\|^2 = (x+y)^T(x+y) = \|x\|^2 + 2x^Ty + \|y\|^2$$

dir. Eğer x ve y dik ise bu durumda pisagor kuralı $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ elde edilir.




278

## Dik Altuzaylar

Tanım: $\mathbb{R}^n$'nin iki alt uzayı X ve Y olsun. Her $x\in X$ ve her $y\in Y$ için $x^Ty=0$ ise X ve Y alt uzaylarına diktir denir. Ve $X\perp Y$ ile gösterilir.

Örk: 1) A, $m\times n$ tipinde bir matris ve $x\in N(A)$ olsun. $Ax=0$ olduğundan

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0 \qquad i=1,2,\dots,m$$

dir. Bu da gösteriyor ki $i=1,2,\dots,m$ için $A^T$'nin i. sütunu x vektörüne diktir x, $A^T$'nin her sütununa dik olduğundan, x,




279

$A^T$'nin sütun uzayındaki her vektöre diktir. Dolayısıyla $N(A)$'daki her vektör $A^T$'nin sütun uzayındaki her vektöre diktir. Yani $\mathbb{R}^n$'de $N(A)$ ve $A^T$'nin sütun uzayı diktir.

2) $\mathbb{R}^3$'de $e_1$ ile gerilen alt uzay X ve $e_2$ ile gerilen alt uzay Y olsun.

$$X = \left\{ \alpha \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{R} \right\}$$

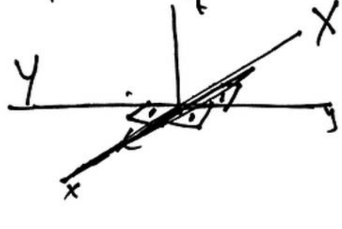
$$Y = \left\{ \beta \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} : \beta\in\mathbb{R} \right\}$$

280

$\forall x = \begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix} \in X \qquad \forall y = \begin{bmatrix}0\\\beta\\0\end{bmatrix} \in Y$

$$x^Ty = [\alpha\ 0\ 0]\begin{bmatrix}0\\\beta\\0\end{bmatrix} = 0$$

$X\perp Y$ dir.




281

Dik alt uzay kavramı günlük hayattaki diklik kavramıyla örtüşmez. Örneğin sınıftaki duvar ve tavan birbirine diktir deriz ama xy-düzlemi ile yz düzlemi dik alt uzaylar değildir. Bunu görmek için xy düzleminde $x_1=(1,1,0)^T$ ve yz düzleminde $x_2=(0,1,1)^T$ vektörlerini alalım.

$$x_1^Tx_2 = 0\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 = 1 \ne 0$$

olduğundan dik alt uzaylar değildir.

örk 3) $\mathbb{R}^3$ de $e_1, e_2$ ile gerilen alt uzay X ve $e_3$ ile gerilen alt uzay Y olsun.

282

Eğer ~~x∈~~ $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}\in X$ ve $y=\begin{bmatrix}0\\0\\y_3\end{bmatrix}\in Y$

ise $x^Ty=0$

olduğundan $X\perp Y$ dir.

Tanım: Y, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı olsun. Y'deki her vektöre dik olan $\mathbb{R}^n$'nin bütün vektörlerinin kümesi $Y^\perp$ ile gösterilsin. Yani

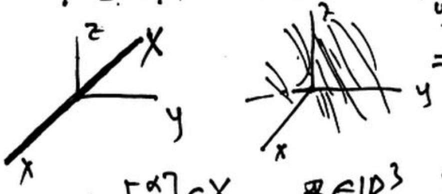
$$Y^\perp = \{x\in\mathbb{R}^n : x^Ty=0,\ \forall y\in Y\}$$

$Y^\perp$, kümesine Y'nin <u>diktümleyeni</u> denir.

Ork: $\mathbb{R}^3$'de $X = span(e_1)$ ve $Y = span(e_2)$ olsun.
($X \perp Y$ dir)

$X^\perp = span(e_2, e_3)$

$Y^\perp = span(e_1, e_3)$




$y\,z$ düzlemi $= X^\perp = span(e_2, e_3)$

$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \in X \quad z \in \mathbb{R}^3 \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$

$x^T z = \alpha z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0$

$z = \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = z_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



Teorem: a) $X$ ve $Y$, $\mathbb{R}^n$'nin dik alt uzayları ise

$$X \cap Y = \{0\}$$

b) $X$, $\mathbb{R}^n$'nin alt uzayı ise $X^\perp$'de $\mathbb{R}^n$'nin alt uzayıdır.

Temel Altuzaylar:

$A$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Vektör uzaylarında gördükki bir $b \in \mathbb{R}^m$ vektörünün $A$'nın sütun uzayında olması için gerek ve yeter şart bazı $x \in \mathbb{R}^n$ için $b = Ax$ olmasıdır. Eğer $A$ matrisini





$\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir lineer dönüşüm olarak düşünürsek $A$'nın sütun uzayı $A$'nın görüntü kümesi ile aynıdır. $A$'nın görüntü kümesini $R(A)$ ile gösterirsek,

$R(A) = \{ b \in \mathbb{R}^m : b = Ax, \text{ bazı } x \in \mathbb{R}^n \}$

$= A$'nın sütun uzayıdır.

$A^T$'nin sütun uzayı, (her $\forall$, $\exists$ bazı)

$R(A^T) = \{ y \in \mathbb{R}^n : y = A^T x, \text{ bazı } x \in \mathbb{R}^m \}$

$R(A^T)$ sütun uzayı $A$'nın satır uzayının aynı-



sıdır, eğer tiplerini $1 \times n$, $n \times 1$ aynı düşünürsek. Bu yönden $y \in R(A^T) \Leftrightarrow y^T$, $A$'nın satır uzayında ise. Sonuç olarak $R(A^T) \perp N(A)$ dır. Aşağıdaki teoremde $N(A)$'nın dik tümleyeninin $R(A^T)$ olduğunu göreceğiz.

Teorem (Temel alt uzay teoremi) Eğer $A$, $m \times n$ tipinde matris ise

$$N(A) = R(A^T)^\perp \quad \text{ve} \quad N(A^T) = R(A)^\perp$$

dir.





Ork: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : Ax = 0 \}$

$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-2x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 = \alpha, \; x_2 = 2\alpha$

$N(A) = \{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \}$

$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R(A^T) = \{ \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \}$



$R(A^T)^\perp = \{ z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : z^T \cdot x = 0, \; \forall x \in R(A^T) \}$

$-2z_1 + z_2 = 0$

$z_1 = \alpha \qquad z_2 = 2\alpha$

$z = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$R(A^T)^\perp = N(A)$





Teorem: $S$, $\mathbb{R}^n$'nin alt uzayı ise

$$boy\, S + boy\, S^\perp = n$$

dir. Eğer $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, $S$ için bir baz ve $\{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\}$, $S^\perp$ için bir baz ise $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{R}^n$'de bir bazdır.

Tanım: $U$ ve $V$, $W$ vektör uzayının altuzayları olsun. Her $w \in W$ vektörü, $u \in U$ ve $v \in V$ olmak üzere, $u+v$'nin toplamı olarak tek türlü yazılıyorsa $W$'ya $U$ ve $V$'nin



direk toplamı denir. Ve $W = U \oplus V$ ile gösterilir.

Teorem: Eğer $S$, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı ise

$$\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$$

dir.

Teorem: Eğer $S$, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı ise

$$(S^\perp)^\perp = S$$

dir.

Bu teoreme göre $S$ alt uzayının dik tümleyeni $T$ ise $T$'nin dik tümleyenide $S$'dir. Bu

durumda $N(A)^{\perp} = R(A^T)$ ve $N(A^T)^{\perp} = R(A)$
yazabiliriz. Ayrıca $Ax=b$ kararlı olması $\Leftrightarrow$
$b \in \mathbb{R}(A)$ olduğu ve $\mathbb{R}(A) = N(A^T)^{\perp}$ olduğundan
aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç: Eğer $A$, $m \times n$ tipinde matris ve $b \in \mathbb{R}^m$ ise
ya $Ax=b$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^n$ vardır
veya öyle $y \in \mathbb{R}^m$ vardır ki $A^T y = 0$ ve
$y^T b \neq 0$ dır.